Universidade
Cruzeiro do Sul

Pró-reitoria de
Pós-graduação e Pesquisa

Produto Educacional

Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

Resolução de Problemas: uma proposta para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças

Ricardo Gonçalves

Universidade
Cruzeiro do Sul

Resolução de Problemas: uma proposta para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças

Ricardo Gonçalves
Norma Suely Gomes Allevato

Resolução de Problemas: uma proposta para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças

Universidade Cruzeiro do Sul
2015

2015

Universidade Cruzeiro do Sul
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática

Reitor da Universidade Cruzeiro do Sul – Prof.ª Dr.ª Sueli Cristina Marquesi

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
Pró-Reitor – Prof.ª Dr.ª Tania Cristina Pithon-Curi

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
Coordenação – Prof.ª Dr.ª Norma Suely Gomes Allevato

Banca examinadora
Prof.ª Dr.ª Norma Suely Gomes Allevato
Profa Dr.ª Cintia Aparecida Bento dos Santos
Prof. Dr. Manoel dos Santos Costa

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL DA
UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL

G629r

Gonçalves, Ricardo.

Resolução de problemas: uma proposta para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças / Ricardo Gonçalves. -- São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2015.
26 p. : il.

Produto educacional (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática).

1. Educação matemática 2. Aprendizagem significativa 3. Resolução de problemas 4. Pesquisa qualitativa 5. Ensino médio – Ourinhos (SP). I. Título II. Série.

CDU: 51:37

Sumário

1 APRESENTAÇÃO

Este produto educacional foi constituído a partir da dissertação intitulada "Resolução de Problemas: uma proposta para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças[1]", defendida em 2015 por Ricardo Gonçalves, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Norma Suely Gomes Allevato. O objetivo dessa pesquisa foi analisar como se realiza a aprendizagem das funções definidas por várias sentenças através da Resolução de Problemas e, a partir disso, construir uma proposta de atividades envolvendo problemas que podem ser desenvolvidos à luz dessa metodologia de ensino. Essa proposta está apresentada no presente texto.

O autor deste trabalho é mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul; Licenciando em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná; Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina/PR e Licenciando em Pedagogia pela Universidade Nove de Julho/SP. Atua como professor de Matemática da Educação Básica, desde 2004, ministrando aulas nas redes pública e particular, e também no Ensino Superior.

O presente material se refere ao produto educacional decorrente de uma pesquisa de mestrado profissional realizada em uma escola particular da cidade de Ourinhos/SP. A metodologia de pesquisa teve abordagem qualitativa, em que o pesquisador, também professor da turma, manteve contato direto com o grupo pesquisado. Os dados foram gravados em áudio e vídeo, fotografados e documentados, e as descrições foram registradas em diário de campo.

Na tentativa de verificarmos quais contribuições a metodologia de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas promove na aprendizagem sobre funções definidas por várias sentenças, envolvemos

[1] Disponível emhttp://www.cruzeirodosul.edu.br/pos-graduacao-pesquisa-extensao/mestrado-e-doutorado/ensino-de-ciencias-e-matematica/dissertacoes-mestrado/

quinze alunos do segundo ano do Ensino Médio no trabalho com a resolução de nove problemas que foram desenvolvidos e trabalhados em cinco encontros.

A metodologia de ensino empregada foi a Resolução de Problemas. Assim, neste produto educacional buscaremos compreender como se pode constituir a compreensão das funções de várias sentenças através dessa metodologia na busca por uma aprendizagem significativa.

Este material é destinado a professores de Matemática, alunos de Licenciatura em Matemática e pesquisadores da área, que têm como objetivo compreender e apresentar aos seus alunos o trabalho com funções definidas por várias sentenças lançando mão de uma metodologia de ensino e aprendizagem mais atual.

Entendemos que a Matemática desempenha um papel de grande importância no currículo escolar e no desenvolvimento de várias habilidades e competências, promovendo a formação do cidadão e a capacidade de pensar matematicamente. Consideramos que é preciso compreender como o conhecimento matemático é construído e se amplia durante a vida escolar dos estudantes, e qual é o papel do professor como organizador e condutor das atividades nas aulas de Matemática em busca de uma aprendizagem significativa. O presente produto pretende contribuir para essas reflexões e compreensões.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Nesta seção apresentaremos a abordagem teórica acerca da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem, e alguns elementos importantes que constituem a aprendizagem significativa.

Problemas e Resolução de Problemas são expressões abrangentes e podem significar diversas coisas, dependendo do contexto em que cada indivíduo está inserido. Para este trabalho, apresentamos algumas ideias acerca do que é um Problema e da Resolução de Problemas numa perspectiva de ensino e de aprendizagem da Matemática proposta no currículo escolar.

Para Allevato e Onuchic (2011), problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer, ou seja, são atividades ou situações em que a resolução do problema não é conhecida ou memorizada pelos estudantes de antemão.

Van de Walle (2009) reforça que problema é qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não têm regras prescritas ou em que não haja métodos particulares ou pré-determinados para a sua resolução.

Dentre algumas concepções acerca da Resolução de Problemas, a adotada neste trabalho é a de ensinar através da Resolução de Problemas. É uma metodologia de ensino e aprendizagem, na qual o conhecimento matemático se constrói ou se amplia através da resolução de um problema gerador, que se refere a um problema proposto com vistas à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento ao longo de sua resolução.

Para Van de Walle (2009) a metodologia de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas sugere que

> Ensinar com tarefas baseadas em resolução de problemas é mais centrado no aluno do que no professor. O ensino começa e se constrói com as ideias que as crianças possuem – seus conhecimentos prévios. É um processo que requer confiança nas crianças – uma convicção de que todas elas podem criar ideias significativas sobre a matemática. (VAN DE WALLE, 2009, p. 58).

Essa ideia proposta por Van de Walle (2009) remete às propostas da Teoria da Aprendizagem Significativa, de Ausubel, Novak e Hanesian (1980), na qual um dos elementos para que a aprendizagem seja significativa é que o professor conheça onde o aluno está para ancorar a nova informação aos conhecimentos prévios da estrutura cognitiva de cada estudante.

Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias “são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal)”. (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980, p. 34). Relação não arbitrária e relação substantiva são dois conceitos básicos que caracterizam a aprendizagem significativa; por isso, a seguir, apresentaremos com mais detalhes cada uma delas.

A não arbitrariedade indica que não é com qualquer conhecimento prévio que o novo conhecimento vai interagir, ou seja, o relacionamento de uma nova informação deve ocorrer com os conhecimentos relevantes presentes na estrutura cognitiva do aprendiz, não de qualquer modo.

A substantividade, por outro lado, significa que o essencial na nova informação é que deve ser interiorizado pela estrutura cognitiva, não apenas os símbolos específicos usados para expressá-la.

Buscando compreender como o aluno pode relacionar de forma não arbitrária e substantiva o novo material à sua estrutura cognitiva com base nos conhecimentos já adquiridos, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) denominam subsunçores esses conhecimentos que já estão presentes na estrutura cognitiva do estudante. Assim, eles consideram importante que o professor conheça o que o aluno já sabe para ancorar as novas informações à estrutura cognitiva.

Consideramos que essas ideias estão bastante aliadas ao desenvolvimento da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem, conforme propõem Allevato e Onuchic (2014), que sugerem dez etapas para sua organização e desenvolvimento:

> 1) Preparação do problema – O professor seleciona ou elabora um problema, ou aceita um problema proposto por um aluno (problema gerador), visando à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula.
> 2) Leitura individual - Cada aluno faz sua leitura do problema. A ação, nessa etapa, é do aluno; ao ler individualmente, tem possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto.
> 3) Leitura em conjunto – Os alunos reúnem-se em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão do problema. O professor pode ajudar na compreensão do problema pelos grupos. Aqui também as ações são realizadas, essencialmente, pelos alunos que, nessa fase, exercitam a expressão de ideias, para o que necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem, a fim de expressar-se com clareza e coerência e fazer- se entender.
> 4) Resolução do problema – Os alunos, em seus grupos, tentam resolver o problema. Esse problema (gerador) é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos à construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. Agora a ação dos alunos volta-se à expressão escrita. Resolvendo o problema, precisarão da linguagem matemática. Se não a dominarem, devem registrar a resolução empregando outros recursos de que dispõem ou que dominam: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas. É importante que os alunos registrem por escrito, no papel, o que conseguiram fazer e entreguem ao professor.
> 5) Observação e incentivo – O professor age, enquanto isso, como mediador. Observa o trabalho realizado nos grupos, incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e as técnicas operatórias já conhecidas, incentiva a troca de ideias entre eles e auxilia em suas dificuldades com problemas secundários, sem fornecer respostas prontas. Deve demonstrar confiança nas condições dos alunos.
> 6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos registram na lousa suas resoluções (certas, erradas ou feitas por diferentes processos). É o momento de compartilhar e uma oportunidade importante para aprimorar a apresentação (escrita) da resolução para mostrar aos colegas.
> 7) Plenária e 8) Busca do consenso – Todos os alunos, com respeito, observam comparam e discutem as diferentes resoluções apresentadas pelos colegas, defendem seus pontos de vista e esclarecem dúvidas. O professor será o guia e o mediador das discussões. A classe chega a um consenso sobre o resultado correto. Nesse momento, ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.
> 9) Formalização do conteúdo – O professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática –, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos matemáticos construídos pela resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades relativas ao conteúdo. Essa etapa final tem o professor como centro das atenções; e este, como detentor do

> conhecimento, irá proporcionar aos alunos o contato com a correção e o rigor do tratamento matemático e mais construção de conhecimento.
> 10) Proposição e resolução de novos problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p 46.)

Essas etapas buscam subsidiar os envolvidos no trabalho com a Resolução de Problemas, pois orientam alunos e professores a desenvolverem atividades que possam potencializar a aprendizagem de conteúdos matemáticos, bem como promover uma aprendizagem mais significativa em um ambiente colaborativo e reflexivo.

Buscando aliar essa metodologia de ensino e às ideias acerca da aprendizagem significativa utilizando as funções definidas por várias sentenças como conteúdo matemático, encontramos nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio PCN_+ que:

> [...] a riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. (BRASIL, 2002, p. 121).

Neste documento há a recomendação de que os problemas não devem ser trabalhados no final do ensino de funções, mas devem ser motivo e contexto para o aluno aprender funções, ou seja, tais contextos aliados à metodologia de ensino através da Resolução de Problemas permitem fazer do problema uma ferramenta para aprender Matemática.

Nessa perspectiva, o trabalho com funções definidas por várias sentenças exerce um papel relevante no ensino e na aprendizagem desse conteúdo, pois permite trabalhar com problemas em diversos contextos, aproximando a Matemática da realidade dos alunos e de outras disciplinas do currículo escolar.

Outro aspecto relevante para o trabalho com funções é a sua utilização e representação nas diversas áreas do conhecimento. Os conceitos sobre funções permitem o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente, desenvolvendo o espírito de investigação que, segundo os PCN_+, é indicado como um objetivo a ser atingido (BRASIL, 2002, p.121).

3 O PRODUTO

O presente produto educacional tem por objetivo apresentar ao professor exemplos de problemas que podem ser trabalhados à luz da metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas buscando uma aprendizagem significativa em um ambiente escolar mais colaborativo e reflexivo.

3.1 Abordagem de um problema que pode ser desenvolvido por meio da metodologia de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas

Buscando promover o desenvolvimento da metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas apresentaremos um problema que pode ser trabalhado em sala de aula seguindo as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2014).

O problema que iremos apresentar nesta seção foi extraído do livro Matemática Completa, 1ª série, de Giovanni e Bonjorno (2005), aprovado no PNLD de 2009 a 2011. Foi desenvolvido em nossa pesquisa (GONÇALVES, 2015) nos permitiu perceber elementos muito interessantes que vão ao encontro de uma proposta mais atual quanto ao ensino e aprendizagem da Matemática.

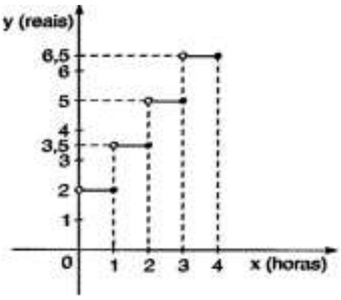
A partir do gráfico de uma função definida por várias sentenças, elaboramos algumas questões que contemplassem a proposta de ensino e aprendizagem de funções segundo os documentos oficiais, a metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, bem como a aprendizagem significativa.

Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1999) as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática que estão presentes nesse problema são:

- Produzir textos matemáticos adequados.

- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

Problema: No gráfico abaixo o eixo das abscissas representa o tempo em horas, e no eixo das ordenadas os valores em reais. Observe o gráfico abaixo e, em seguida, faça o que se pede:



a) Elabore uma situação que possa ser representada pelo gráfico acima.

b) Elabore duas perguntas e as resposta de acordo com a situação que você elaborou no item a.

c) É possível encontrar a lei de formação da função representada nesse gráfico? Se sim, apresente-a. Se não, justifique sua resposta.

d) Complete a tabela

x	y
2,5	
	3,5

Explique o que significam os valores que você indicou em cada linha da tabela em relação à situação que você elaborou no item a.

e) Que outra situação poderia ser elaborada ou expressa por uma função com comportamento semelhante ao da função representada no gráfico acima? Escreva detalhadamente essa situação.

f) Assinale a denominação do gráfico apresentado acima.
( ) Gráfico de uma função de retas.
( ) Gráfico de uma função maior inteiro.
( ) Gráfico de uma função de várias sentenças.
( ) Gráfico de uma função infinita.
Agora, justifique a alternativa que você escolheu.

Fonte: Adaptado de Giovanni e Bonjorno (2005)

3.1.1 Características presentes no item “a” do Problema

Percebemos nesse item que se trata de um problema aberto. Entendemos como pesquisa aberta as ações promovidas por aqueles problemas em cujo enunciado não há uma estratégica específica para resolvê-los. A resolução de problemas abertos exige do resolvedor um nível mais alto de raciocínio. Eles possuem várias respostas corretas ou vários métodos para obter a resposta; portanto, são aqueles em que a situação inicial ou o objetivo final (ou ambos) permitem que o resolvedor faça escolhas.

O gráfico do Problema 1, poderíamos relacionar uma situação prática de um estacionamento rotativo. Na primeira hora o valor pago será R$ 2,00, ou seja, do momento em que o veículo foi estacionado até uma hora, o valor pago será R$ 2,00. A partir de uma hora até 2 horas que o veículo ficou estacionado, devem ser pagos R$ 3,50, ou seja, acrescenta-se R$1,50 a partir de uma hora excedente. Assim, sucessivamente, o gráfico poderia ser a representação da cobrança de um estacionamento, em que a primeira hora custa R$ 2,00 e as horas subsequentes, a partir da primeira, acrescentam R$1,50 por hora excedente. O gráfico também pode retratar outras situações como, por exemplo, a cobrança em jogos de boliche.

Nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio PCN$_+$ (BRASIL, 2002), é destacado que:

> [...] a riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas.

Van de Walle (2009) aponta cinco representações acerca do trabalho com funções, No caso desse item está em foco à representação gráfica e a situação elaborada pelo aluno é importante porque o contexto dá sentido ao gráfico e o gráfico acrescenta maior compreensão ao contexto. O gráfico é uma imagem que reforça as conexões entre a tabela, o padrão e os valores que constituem uma determinada função.

3.1.2 Características presentes no item “b”do Problema

Temos nesse item uma associação com o item a; também se refere a uma questão envolvendo uma pesquisa aberta, porém, entre as cinco representações acerca do trabalho com funções proposta por Van de Walle (2009) esse item contempla a linguagem de expressão para funções: as relações funcionais são regras de correspondência dependentes; é importante utilizar uma linguagem que confirme a relação de dependência entre as variáveis que compõem a função fazendo uso, por exemplo, do termo “é uma função de”.

Poderíamos nesse item apontar questões como: Qual o valor a ser pago pelo proprietário de um veículo que deixou o carro estacionado por 4 horas? Qual seria o tempo de permanência de um veículo quando o proprietário pagou para o estacionamento a quantia de R$ 8,00? Seria possível o proprietário de um veículo pagar R$ 1,00 por deixar o veículo nesse estacionamento? Justifique sua resposta.

Essas e muitas outras questões podem aparecer no desenvolvimento desse item, pois levam em conta os múltiplos saberes dos alunos, bem como o contexto em que cada aluno está inserido, suas relações com o mundo e seu pensamento matemático.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), devemos solicitar questões de dissertação, que são questões mais desafiadoras do que as questões de respostas curtas. Essas questões podem ser usadas para testar a capacidade do aluno para organizar ideias, construir argumentos coerentes, avaliar as ideias criticamente e se expressar de modo claro e convincente. Esse recurso também oferece maior escopo para um pensamento original e independente, e permite perceber nos alunos seus estilos cognitivos, sensibilidades, problemas e estratégias de Resolução de Problemas.

Um outro elemento destacado por esses autores e que consideramos presente nesse item b é o fato de propor aos estudantes uma tarefa de aprendizagem, sequencialmente dependente de outra, ou seja, que não possa ser executada sem um verdadeiro domínio da precedente; esse procedimento ajuda o professor a verificar se houve ou não a aprendizagem significativa.

3.1.3 Características presentes no item “c” do Problema.

Dentre as cinco representações acerca do trabalho com funções, propostas por Van de Walle (2009), nesse item temos a *equação simbólica*: consiste em expressar uma função como uma equação, de modo que ela possa ser examinada em sua forma mais abstrata. Essa forma de representação promove a compreensão das propriedades da função que podem ser aplicadas ao contexto do problema, bem como facilita o cálculo dos valores da função.

Esse item aborda problemas de processo ou heurísticos**:** esse tipo de problema tem como objetivo levar o aluno a pensar e elaborar um plano de ação, uma estratégia para a resolução do problema.

Para responder essa questão o aluno deve mobilizar seus conhecimentos prévios sobre, por exemplo: função constante, intervalos e representações algorítmicas de funções. Na tentativa de resolver o problema, ele faz uma reflexão sobre os conhecimentos presentes na sua estrutura cognitiva, tentando ancorar o novo conhecimento de forma clara e legítima.

A compreensão correta do gráfico pode sugerir a seguinte resposta:

$$f(x) = \begin{cases} 2{,}0, \ se \ 0 < x \leq 1 \\ 3{,}5, \ se \ 1 < x \leq 2 \\ 65, \ se \ 2 < x \leq 3 \\ 65, \ se \ 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

Van de Walle (2009) considera que a Resolução de Problemas desenvolve o “potencial matemático” dos estudantes, e como metodologia de ensino e aprendizagem é considerada um processo de fazer Matemática, resolver problemas, raciocinar (argumentar), comunicar, conectar e representar.

3.1.4 Características presentes no item “d” do Problema.

Nesse item verificamos que está presente a representação por tabelas de funções: a tabela pode servir como um apoio para facilitar a generalização de uma fórmula que expresse a função.

Atividades baseadas na Resolução de Problemas fornecem diversos caminhos para chegar à solução, o que possibilita, a cada estudante, dar sentido, bem como ampliar suas ideias, ouvir e discutir as ideias de outro aluno ou suas próprias ideias com os colegas.

A partir da observação e compreensão do gráfico o aluno pode chegar à seguinte solução:

x	**y**
2,5	5
$2{,}0 < x \leq 3{,}5$	3,5

A partir do gráfico e da tabela podemos estabelecer relações entre grandezas, trabalhar com os conceitos de domínio e imagem, os intervalos do domínio e a representação por meio de tabelas a partir de um problema prático envolvendo o gráfico definido por uma função. O aluno é convidado a investigar o comportamento do gráfico para transcrever seus valores em uma tabela, ou seja, as ações investigativas decorrentes de situações-problema promovem reflexões que direcionam os alunos a redimensionassem o conhecimento que já possuem, sendo protagonistas do processo de ensino e aprendizagem.

3.1.5 Características presentes no item “e” do Problema

Temos nesse item mais uma questão aberta, pois não há uma resposta que envolva a memorização ou um procedimento algorítmico para resolvê-lo.

E, novamente, está contemplada uma das cinco representações acerca do trabalho com funções, propostas por Van de Walle (2009): *o próprio padrão* *concreto, a que podemos nos referir como o contexto*. Essa função começa com um contexto e, embora nem toda função possua um contexto do mundo real, é importante apresentar funções que façam sentido aos estudantes.

Em nossa pesquisa (GONÇALVES, 2015) uma das duplas apresentou como uma possível situação com comportamento semelhante ao da função representada no gráfico, o “aluguel de bicicletas em cidade de praia”, pois, segundo relato da dupla, o aluguel por uma hora custa, por exemplo, R$ 4,00 e as demais horas custam R$ 2,00 por hora. Essa situação, de fato, poderia ser expressa por uma função de várias sentenças, semelhante à que foi representada no gráfico do problema dado.

Essa ideia foi atingida pela investigação e reflexão sobre o comportamento do gráfico. Quanto ao pensamento reflexivo dos estudantes, Van de Walle (2009, p. 49) afirma que é importante “envolvê-los em problemas que os favorecem a usar suas ideias enquanto procuram soluções e criam novas ideias nesse processo”. Para o autor, o pensamento reflexivo não favorece apenas as respostas, mas as explicações e justificativas para o desenvolvimento da resolução de um determinado problema, o que pode ser explorado e avaliado durante uma plenária entre os alunos e o professor.

Além disso, esse item vai ao encontro do que é sugerido por Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Moreira (1999 apud BORSSOI, 2013); segundo esses autores devemos solicitar aos alunos que diferenciem ideias relacionadas, mas não idênticas, ou que identifiquem os elementos essenciais de um conceito ou proposição.

3.1.6 Características presentes no item “f” do Problema

Essa questão como último item pretende verificar se o aluno, após a resolução dos itens anteriores, consegue fazer uso das definições e nomenclaturas matemáticas, pois para Van de Walle (2009) a Resolução de Problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a terem bom desempenho e manter os pais informados. Esse item está associado ao ensino-aprendizagem-avaliação, pois enquanto os alunos discutem ideias, usam modelos interativos, refletem sobre a solução dos problemas e apresentam as resoluções, eles fornecem um fluxo permanente de informações que permitem ao professor fazer interações, questionamentos e avaliar e aprimorar o processo de ensino e aprendizagem.

A correta resposta no item, gráfico de uma função de várias sentenças, mostra que o aluno compreendeu corretamente o comportamento da função, bem como sabe fazer uso correto da linguagem matemática.

Para contribuirmos com o ensino e a aprendizagem das funções definidas por várias sentenças deixaremos mais três problemas que podem ser desenvolvidos utilizando a metodologia de Resolução de Problemas. Esses problemas foram desenvolvidos na pesquisa que de deu origem a este produto educacional e podem ser consultados na dissertação de GONÇALVES (2015).

Problema 01:

É um fato conhecido que, qualquer que seja a substância, a sua temperatura permanece constante durante a fusão. No processo de aquecimento de certa substância, sua temperatura T (em °C) variou com o tempo t (em minutos) de acordo com a seguinte lei:

$$T(t)=\begin{cases} 20+5t, \ se\ 0\le t\le 30 \\ 170, \ se\ 30\le t\le 50 \\ 20+3t, se\ t\ge 50 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de T como função de t.

b) Qual é a temperatura da substância no início do processo? Explique como você encontrou essa resposta.

c) Qual é a temperatura da substância decorridas 3 horas do início do processo? Explique como você encontrou essa resposta.

d) Sabendo-se que houve fusão da substância, em qual intervalo de tempo ela ocorreu? Justifique sua resposta.

e) Em que intervalo de tempo houve a maior variação da temperatura por minutos? Explique sua resposta.

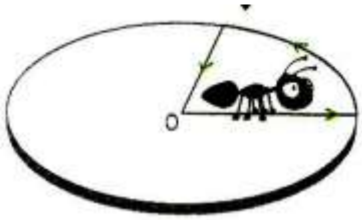
f) Qual o domínio da função T(t)?

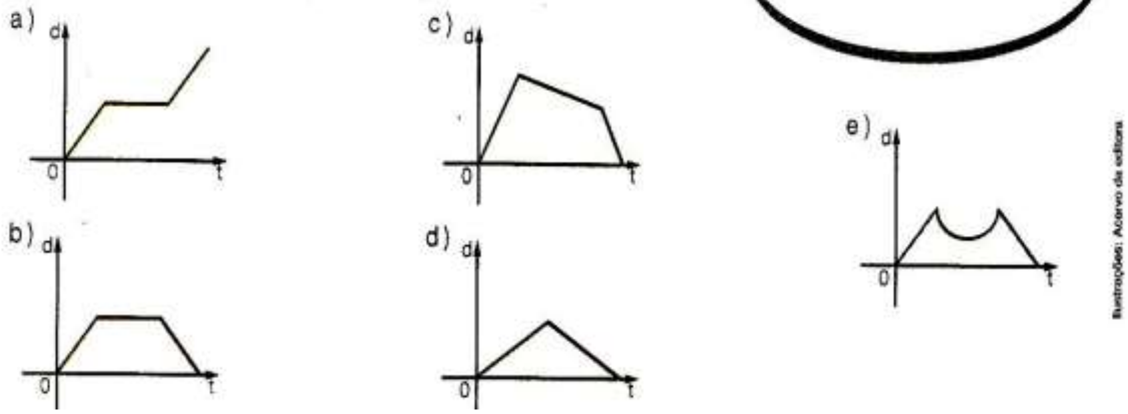
g) O que você entende sobre o significado da terceira sentença que compõe essa função? Explique.

Fonte: Adaptado de Giovanni e Bonjorno (2005)

Problema 02:

(OBMEP) Uma formiguinha parte do centro de um círculo e percorre uma só vez, com velocidade constante, o trajeto ilustrado na figura. Qual dos gráficos a seguir representa a distância *d* da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo *t*?





1) Explique, detalhadamente, a alternativa que você escolheu.

2) Explique, detalhadamente, porque você não escolheu as outras quatro alternativas

Fonte: Adaptado de Souza (2010)

Problema 03:

Certa indústria pode produzir x aparelhos por dia, e o custo C para produzir esses aparelhos é dado pela função:

$$C(x)=\begin{cases} 5+x(12-x) & se\ 0\leq x\leq 10 \\ -\frac{3}{2}x+40 & se\ 10<x\leq 20 \end{cases}$$

Agora, faça que se pede:

a) Complete a tabela abaixo sabendo-se que x é a quantidade de aparelhos produzidos por dia e C é o custo para produção desses aparelhos. (utilize a calculadora)

Quantidade de aparelhos produzidos (x)	Cálculos	Custo (C)
0		
1		
2		
3		
5		
6		
7		
8		
10		
11		
12		
20		

b) Com base na função C(x) qual sentença pode ser escrita utilizando o termo x^2? Escreva essa sentença indicando o termo x^2.

c) Para a produção de 0 até 10 aparelhos qual é o custo máximo? Como você encontrou esse valor? Seria possível encontrar esse valor sem a confecção da tabela? Como?

d) Acima de 10 aparelhos como varia o valor do custo? O que você acha que isso significa?

e) Se, em um dia, foram produzidos 9 aparelhos e, no dia seguinte, 15 aparelhos, qual a diferença entre o maior e o menor custo de produção por unidade nesses dias?

Fonte: Adaptado de Paiva (2010)

4 ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Para a condução da metodologia de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas é interessante estar atento às orientações sugeridas por Allevato e Onuchic (2014), que fornecem subsídios para o professor potencializar as atividades pedagógicas em sala de aula.

A escolha do problema gerador é uma etapa fundamental para o desenvolvimento do trabalho através da Resolução de Problemas; o professor pode aceitar o problema sugerido pelos alunos ou propor problemas a eles.

A proposição do problema é uma atividade relevante em sala de aula, pois a partir da resolução do problema gerador é possível, dentre vários fatores, construir ou reconstruir o conceito de função usando relações entre duas grandezas, analisar e interpretar diversos tipos de gráficos relacionando-os à sua função, resolver problemas envolvendo funções, compreender tabelas que representam diversas situações, construir e analisar leis de formação de função, promovendo a contextualização e a compreensão dos problemas envolvendo funções definidas por várias sentenças.

Após essa etapa, os alunos devem tentar resolver o problema apenas com os conhecimentos prévios, sem interação com o professor ou com outros alunos. Durante essa resolução individual, sugerimos que o professor estipule um tempo para a resolução do problema; em nossa pesquisa foram destinados 25 minutos para essa etapa.

Em seguida, reunidos em duplas, os alunos junto com o professor releem o problema, discutem o que fizeram individualmente e aprimoram a resolução do problema. O professor, como mediador do conhecimento, busca constantemente incentivar e fornecer dicas necessárias para que as duplas se sintam motivadas para resolver o problema e para aprender novos conteúdos matemáticos que estão incorporados naquele problema.

As resoluções individuais e das duplas devem ser registradas por escrito e entregues ao professor; tais resoluções podem mostrar a ocorrência de aprendizagem, bem como fornecer elementos importantes para a próxima etapa: a plenária e a busca de consenso.

Alguns alunos são convidados a registrarem algumas resoluções na lousa. O momento da plenária e a busca do consenso promovem situações em que os alunos são convidados a refletirem sobre suas resoluções, propondo resoluções mais coerentes do que já haviam desenvolvido. Em nossa pesquisa observamos que esse problema que apresentamos neste produto educacional foi desafiador, despertando nos alunos a vontade de compreendê-lo e possibilitando estabelecer relações das funções de várias sentenças em diversos contextos.

Na etapa que consiste na busca pelo consenso, é fundamental que o professor tenha domínio do conteúdo matemático, e que, a partir das resoluções apresentadas pelos alunos, promova a reflexão das resoluções com a intenção de introduzir novos conceitos e ideias matemáticas e de promover uma aprendizagem significativa.

Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980) amostras de trabalhos incluem experiências de campo, habilidades de laboratório, desempenho clínico, desenhos, exposição de temas, relatórios, pesquisas, uso de ferramentas, entre outros. São instrumentos de avaliação, que possibilitam a percepção de traços como flexibilidade, engenhosidade, perseverança e criatividade, elementos, que aparecem durante a plenária e a busca do consenso.

O papel do professor, nesse momento da aula, é bastante importante: deve incentivar o pensamento reflexivo promovendo um ambiente colaborativo entre os envolvidos no ambiente escolar, bem como valorizar os esforços dos alunos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho com funções definidas por várias sentenças através da Resolução de Problemas exerce um papel relevante no ensino e na aprendizagem desse conteúdo, pois permite trabalhar com problemas em diversos contextos, aproximando a Matemática da realidade dos alunos e de outras disciplinas do currículo escolar.

Outro aspecto relevante para o trabalho com funções é a sua utilização e representação nas diversas áreas do conhecimento. Além disso, os conceitos sobre funções permitem o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente, desenvolvendo o espírito de investigação, que segundo os PCN_+, é indicado como um objetivo a ser atingido (BRASIL, 2002, p.121).

Percebemos que o trabalho com Resolução de Problemas é uma metodologia que pode contribuir para melhorar as atividades de ensino e aprendizagem da Matemática, sobretudo quando desenvolvida seguindo as orientações de ensino através da Resolução de Problemas, embora essa metodologia não deva ser entendida como a única ferramenta eficaz.

É preciso diversificar o modo de ensinar e aprender Matemática, possivelmente até mantendo algumas atividades de caráter mais tradicional, que também contribuem para o desenvolvimento e a compreensão de conteúdos matemáticos, uma vez que os alunos já estão habituados a elas. Nessa perspectiva, o professor deve lançar mão de diferentes recursos metodológicos, seja a Resolução de Problemas, a modelagem matemática ou uma aula expositiva.

Além disso, foi possível observar em nosso trabalho que a Resolução de Problemas precisa ir além das atividades individuais, buscando promover, dentre outros aspectos, um ambiente de grande interação entre alunos e professor, para que as resoluções desenvolvidas pelos estudantes sejam analisadas e refletidas em um ambiente colaborativo em que o aluno fica à vontade para expor suas ideias e compreender alguns fenômenos e resoluções de outros grupos de alunos ou do próprio professor.

Dentre alguns aspectos relevantes propostos por Van de Walle (2009), ficou evidente em nossa pesquisa o fato de que a Resolução de Problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas. Quando os alunos estão resolvendo problemas eles refletem sobre os elementos, conceitos e outros aspectos daqueles problemas; assim as ideias emergentes se integram com as já existentes, havendo uma melhor compreensão das novas ideias envolvidas naqueles problemas fortalecendo a aprendizagem significativa pelos alunos.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**. Rio Claro, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: Onuchic, L. R. et al. (Org.) **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial. 2014. p. 35-52.

AUSUBEL, D. P; NOVAK, J.D. e HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro, Interamericana. Tradução para português, de Eva Nick et al., da segunda edição de Educational psychology: a cognitive view. (1980).

BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias: Articulações em Diferentes Contextos Educacionais**. Tese. (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2013. p. 256.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002. 144 p.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa**. 1ª série. São Paulo: FTD, 2005.

GONÇALVES, R. **Resolução de Problemas: uma proposta para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças.** Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2015.

PAIVA, M. **Matemática**. Vol 1. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

SOUZA, J. **Coleção Novo Olhar**. 1ª série. São Paulo: Editora FTD, 2010.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.