Universidade Cruzeiro do Sul

Pró-reitoria de
Pós-graduação e Pesquisa

Produto Educacional

Mestrado em Ensino de
Ciências e Matemática

CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO EM SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

TALITA FREITAS DOS SANTOS MAZZINI

Construção do Pensamento Geométrico em Sequências Didáticas

Talita Frietas dos Santos Mazzini
Márcio Eugen Klingenschmid Lopes dos Santos

Construção do Pensamento Geométrico em Sequências Didáticas

Universidade Cruzeiro Do Sul
2022

Universidade Cruzeiro do Sul
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa

Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática

Reitor da Universidade Cruzeiro do Sul – Prof. Dr. Luiz Henrique Amaral

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
Pró-Reitor – Profa. Dra. Tania Cristina Pithon-Curi

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
Coordenação - Profa. Dra Norma Suely Gomes Allevato

Banca examinadora

Prof. Dr Márcio Eugen Klingenschmid Lopes dos Santos

Profa. Dra Vera Maria Jarcovis Fernandes

Prof. Dr Carlos Eduardo Rocha dos Santos

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL DA
UNIVERSIDADE CRUZEIRO DO SUL

Mazzini, Talita Freitas do Santos.

M429c

Construção do pensamento geométrico em sequências didáticas./ Talita Freitas do Santos Mazzini -- São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2022.
35 f. : il.

Produto educacional (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática).

1 Teoria de Van Hiele. 2. Pensamento geométrico. 3. Didática matemática. I. Título. II. Série.

CDU: 5(07)

Sumário

1 APRESENTAÇÃO

Prezados educadores, a sequência didática apresentada neste produto é resultante da pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Cruzeiro do Sul, sendo parte integrante da dissertação intitulada **"Teoria de Van Hiele: os níveis de pensamento geométrico dos alunos concluintes do Ensino Fundamental",** por Talita Freitas dos Santos Mazzini, sob orientação do Profº. Dr. Márcio Eugen Klingenschmid Lopes dos Santos.

A autora deste material é Graduada em Matemática pela UNIABC – Universidade do Grande ABC; e Graduado em Licenciatura Plena em Pedagogia pela FACON – Faculdade de Conchas.

Atua como professor da rede privada e pública desde 2004, atualmente está designada como professor coordenador pedagógico de escola E.E. Profª Beatriz do Rozário Bassi Astorino desde 2017 na Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Este produto é o resultado de práticas e pesquisa desenvolvidas na turma do nono ano do Ensino Fundamental – Anos finais, sendo este um caderno pedagógico que servirá de guia prático para o professor de Matemática para ensino de geometria.

Neste caderno encontram-se o questionário e as atividades voltadas ao ensino da geometria. O questionário, já testado em sala de aula, servirá como suporte para o professor, verificando em que nível do pensamento geométrico seus alunos se encontram segundo o modelo de Van Hiele. O objetivo do questionário é identificar em qual momento da aprendizagem geométrica os educandos se encontram e quais são suas dificuldades, analisando assim os níveis um, dois e três: Visualização, Análise e Dedução Informal. As atividades poderão ser aplicadas, da forma como o professor desejar, visto que dependerá do nível em que a turma se encontra. O principal objetivo desse caderno é auxiliar o educador ao introduzir o conteúdo de geometria do Ensino Fundamental, visando minimizar as barreiras da aprendizagem e contribuindo para o raciocínio matemático.

Para finalizar lembramos que este manual é flexível e poderá ser adaptado de acordo com os objetivos pretendidos assim como a realidade da sua sala de aula e a pluralidade no qual a escola está inserida.

2 INTRODUÇÃO

Tendo em vista que a conteúdo Geometria é peça indispensável para no ensino de Matemática, levando em consideração que o aluno adquire grandes habilidades através do desenvolvimento do raciocínio lógico, este produto surge em função do grande número de alunos que estão ingressando no Ensino Médio sem ao menos ter desenvolvido o nível básico de pensamento geométrico.

Em resposta a este cenário busca-se um método para diminuir essa defasagem no ensino da Matemática começando pelo ensino fundamental, mais precisamente na aquisição dos conhecimentos geométricos, na tentativa de minimizar o problema acima citado. Por conseguinte, para auxiliar no estudo da geometria sugere-se a utilização de sólidos geométricos para serem utilizados no estudo da Geometria Plana no Ensino Fundamental juntamente com este caderno pedagógico, para que assim, o professor do do ensino fundamental possa ter neste material ferramenta de apoio para uma aula diferenciada, de modo a despertar o interesse e atenção dos alunos.

Este produto educacional traz sequências didáticas a serem aplicas em sala de aula para o ensino de geometria no Ensino Fundamental. As atividades foram desenvolvidas para serem trabalhadas utilizando o modelo de Van Hiele, para que o professor possa identificar as dificuldades enfrentadas pelo educando. Inicialmente procura-se verificar em qual nível do desenvolvimento do pensamento geométrico cada educando se encontra, analisando por meio das respostas obtidas quais foram as dificuldades encontradas e, assim, através de atividades específicas e metodologia apropriada, contribuir para o desenvolvimento e evolução do pensamento matemático.

O caderno pedagógico apresenta dois momentos didáticos, sendo o primeiro constituído de um questionário, em que o professor o aplicará como forma de entender os conhecimentos prévios dos estudantes. Já o segundo momento, contempla atividades planejadas, oferecendo alternativas que contribua para o desenvolvimento da visualização, e para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

3 TEORIA DE VAN HIELE E O PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Professores de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio, constantemente apontam falhas no desempenho de seus alunos nas aulas de Geometria. Lamentam-se de uma série de problemas, como a dificuldade de levar os alunos a aprender algum conceito novo ou a de aplicar os conceitos aprendidos em exemplos semelhantes, pelo fato de estarem presos a fórmulas. Essa problemática ocorre não só no Brasil, mas em todo o mundo e vem sendo enfrentada por muitos anos (PAVANELLO, 1993).

Preocupados, diante desse problema enfrentado, dois professores holandeses, que davam aula de Matemática no curso secundário, passaram a estudar profundamente a situação com o objetivo de encontrar uma solução. Esses professores são Pierre Marie Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, que, sob a orientação do educador matemático Hans Freudenthal, pesquisaram o ensino de Geometria com alunos de 12 e 13 anos, enfatizando a manipulação de figuras. O resultado dessa pesquisa foi publicado após concluírem o doutorado na Universidade de Utrecht. Dina faleceu logo depois de terminar a tese, então foi Pierre quem esclareceu, aperfeiçoou e promoveu a teoria de Van Hiele, como é conhecida (JAIME; GUTIERREZ, 1990).

A aplicação da metodologia de ensino baseada na teoria de Van Hiele, também considerada um modelo de aprendizagem, é uma possível estratégia para a reversão da problemática no ensino da geometria, pois, por ter sido originada em sala de aula, a teoria aliou os aspectos cognitivo e pedagógico do ensino da geometria (NASSER; SANTANNA, 1997). O modelo Van Hiele só não ficou totalmente no obscurantismo porque a União Soviética o adotou nos anos 60, após a reformulação do currículo de geometria em suas escolas.

O modelo demorou a merecer atenção internacional. Nos Estados Unidos, somente na década de 1970, motivados por encontrar soluções para os problemas com o ensino de geometria na escola secundária, muitos pesquisadores tomaram como base de estudos a teoria dos Van Hiele. Em 1973, Hans Freudenthal publicou um livro intitulado “Mathematical as an Task Educational” no qual citava o trabalho dos Van Hiele e, em 1976, o professor americano Izaak Wirsup começou a divulgar o modelo em seu país. O interesse pelas contribuições dos Van Hiele tornou-se cada vez maior após as traduções para o inglês feitas em 1984 por Geddes, Fuls e Tisher. De modo geral, tais pesquisas objetivavam testar a validade do modelo, a viabilidade, as vantagens de sua aplicação (CROWLEY, 1996).

No Brasil, um dos trabalhos pioneiros foi apresentado pelo professor Nilson José Machado no livro “Matemática e Língua Materna” da editora Cortez publicado em 1990, e em 1992, uma aplicação do modelo foi publicada pelo Projeto Fundão, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, numa apostila chamada “Proposta de Geometria segundo a teoria da Van Hiele” (KALEFF et al., 1994).

Andrade e Nacarato (2004), em pesquisa produzida no Brasil sobre as tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria a partir de trabalhos apresentados nos Encontros Nacionais de Educação Matemática no período de 1987 a 2001, apontam que, teoricamente, os trabalhos produzidos vêm se pautando pelo modelo Van Hiele, pela didática da Matemática Francesa e pelos construtos epistemológicos relativos à visualização e representação.

Os trabalhos como Ferreira (2013); Bezerra e Lopes (2016); Barguil (2016), Nascimento (2016); e Vital, Martins e Souza (2016) apontam como tendência do uso desses instrumentos no processo de ensino e aprendizagem de Geometria nas salas de aulas. Os mesmos sugerem a inversão do processo de ensino das Geometrias plana e espacial, visando melhorar a compreensão dos alunos. Tal fato é justificado pelas muitas dificuldades que os estudantes apresentam em diferenciar figuras planas de espaciais.

Franco e Dias (2020) constata a escassez de pesquisas que realizam mapeamentos ou estudos em relação à Geometria, especificamente referentes ao modelo de Van Hiele, e ressalta a necessidade de se refletir sobre o modelo e sua abordagem.

O modelo de Van Hiele tem servido de base para trabalhos desenvolvidos no Ensino Fundamental e Médio como "O Ensino do conceito de área no sexto ano do Ensino Fundamental: uma proposta didática fundamentada na Teoria de Van Hiele"(ARAUJO, 2012) e "Ressignificando conceitos de Geometria Plana a partir dos estudos de sólidos geométricos"(OLIVEIRA, 2012) abordando, principalmente, os níveis iniciais do mesmo. Os autores destacam que o modelo tem influenciado, também, pesquisas desenvolvidas em ambientes computacionais, envolvendo a Geometria.

É importante que o professor, durante a prática pedagógica, ofereça espaços para que os alunos possam trocar informações, discutir, elaborar pensamentos e opinar. Que traga novas evidências para que possam incluí-las na discussão e tomar posicionamento. Essas abordagens podem ser realizadas pelo professor ou ser propostas através de atividades como leitura de textos, atividades experimentais, demonstração, observação de fenômenos etc. Otimizar o espaço educativo pode contribuir nas interações discursivas para queconstruam e reelaborem o conhecimento em sala de aula (LOPES SCARPA, 2015).

Um dos recursos que que tem tido crescente abordagem é o da experimentação pois acabam tornando os conteúdos mais atraentes. Segundo Cavalcante e Silva (2008) a inclusão da experimentação torna fundamental, pois acaba exercendo uma função pedagógica que ajuda os alunos a relacionarem ateoria com a prática.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada em dezembro de 2018, aponta para apresenta a proposta de interpretação de modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações problema sob uma perspectiva científica.

A experimentação desperta grande interesse nos educandos, e isso é do conhecimento dos professores. É notório para aos educadores, que a experimentação pode aumentar a capacidade de aprendizado, pois funciona como meio de envolver os alunos em diversos temas. (GIORDAN,1999).

4 OS NÍVEIS DE RACIOCÍNIO

De acordo com o modelo original da Teoria de Van Hiele, as pessoas desenvolveriam o pensamento geométrico conforme cinco níveis, enumerados de 0 a 4. Respeitando as críticas dos pesquisadores americanos sobre a relevância do nível zero, em 1986, Pierre M. Van Hiele escreveu o livro “Structure e Insight: A Theory of Mathematics Education”, propondo uma simplificação do modelo original, com os níveis enumerados de 1 a 5, descritos em termos gerais e comportamentais (OLIVEIRA, 2012).

Primeiro Nível (Básico): Reconhecimento – Esse período tem por características principais: o reconhecimento, a comparação e as nomenclaturas das figuras geométricas por suaaparência global. Pode-se dizer que a Geometria é visualizada, mas somente por sua aparênciafísica, não por suas propriedades. A classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios é um exemplo da compreensão que a criança deve ter nesta fase.

Segundo Nível: Análise – Nesta fase acontece a análise das figuras em termos de seuscomponentes, reconhecendo suas propriedades geométricas e usando-as para resolver problemas. Não obstante, ainda não é possível explicar a relação que existe entre as propriedades. Tem-se como exemplo a descrição de um quadrado por meio de suas propriedades: possui quatro lados iguais, quatro ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos, mas o aluno ainda não consegue fazer a relação entre suas propriedades para dizer que todo quadrado também é um retângulo.

Terceiro Nível: Abstração - Neste nível os alunos já possuem percepção da necessidade de uma definição precisa, compreendendo que uma propriedade pode decorrer de outra. O aluno começa a argumentar informalmente e consegue fazer ordenação de classes de figuras geométricas. Reconhecer as características principais de um quadrado, como quatro lados iguais, quatro ângulos retos e ainda reconhecer que todo quadrado é um retângulo.

Quarto Nível: Dedução – percebe-se nessa fase o domínio do processo dedutivo e dasdemonstrações, bem como o reconhecimento das condições necessárias e suficientes. O aluno passa a compreender alguns axiomas, postulados e teoremas, partindo assim, para a construçãode demonstrações. Um exemplo seria a demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros por meio da congruência de triângulos.

Quinto Nível: Rigor - Neste nível o aluno já está apto ao estudo da Geometria, sendo capaz de compreender demonstrações formais e, também, o estabelecimento de teoremas em diversos sistemas, bem como fazer comparação entre eles.

Segundo Nagata (2016, p. 29), “para que haja compreensão do conteúdo o professor precisa conhecer toda a estrutura envolvida de forma coerente, utilizando a linguagem adequadapara cada grupo de alunos, a fim de tornar o processo de aprendizagem mais proveitoso”. Dessaforma, cabe ao professor ser um mediador, entendendo em que nível do conhecimento seu alunose encontra, para assim poder guiá-lo para o cominho correto.

5 PROPRIEDADES DA TEORIA DE VAN HIELE

Junto com as características particulares de cada nível de raciocínio, faz-se necessário mencionar algumas propriedades globais da teoria de Van Hiele. Para Crowley (1996), “essas propriedades são particularmente significativas para educadores, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino”. São elas:

1. Sequencial

O aluno deve, necessariamente, passar por todos os níveis, uma vez que não é possível atingir um nível posterior sem dominar os anteriores.

2. Avanço

A progressão ou não de um nível para outro depende mais dos métodos de ensino e do conteúdo do que da idade ou maturação biológica. Nenhum método de ensino permite ao aluno pular um nível, alguns acentuam o progresso, mas há alguns que retardam.

3. Intrínseco e Extrínseco

Os objetivos implícitos num nível tornam-se explícitos no nível seguinte.

4. Linguística

Cada nível tem sua própria linguagem e um conjunto de relações interligando-os. Assim, uma relação que é correta em um certo nível, pode se modificar em outro nível.

5. Combinação inadequada

O professor e o aluno precisam raciocinar em um mesmo nível, caso contrário, o aprendizado não ocorre. Ou seja, professor, material didático, conteúdo e vocabulário devem estar compatíveis com o nível do aluno.

6 FASES DE APRENDIZAGEM

Para completar a descrição da teoria, vamos expor a proposta de Van Hiele sobre os passos que o professor deve seguir para ajudar seus alunos a avançar nos níveis de raciocínio. Como já foi mencionado, os Van Hiele afirmam que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da maturidade do aluno.

Os Van Hiele propuseram uma sequência didática de cinco fases de aprendizagem: interrogação informada, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração.

As fases não são, por conseguinte, associada para um determinado nível, mas cada nível de raciocínio começa com atividades da primeira fase e continua com as atividades das fases seguintes. No final da quinta fase, os alunos devem ter atingido o próximo nível de raciocínio.

As principais características das fases de aprendizagem são:

1. Interrogação informada

Professor e aluno conversam e desenvolvem atividades sobre os objetos de estudo do respectivo nível. Aqui se introduz o vocabulário específico do nível, são feitas observações e várias perguntas. É uma fase preparatória para estudos posteriores.

2. Orientação dirigida

Atividades são desenvolvidas para explorarem as características de um nível e isso deve ser feito com o uso de material selecionado e preparado pelo professor.

3. Explicação

Agora, o papel do professor é de somente orientar o aluno no uso de uma linguagem precisa e adequada. Baseando-se em experiências anteriores, os alunos revelam seus pensamentos e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas trabalhadas e observadas.

4. Orientação livre

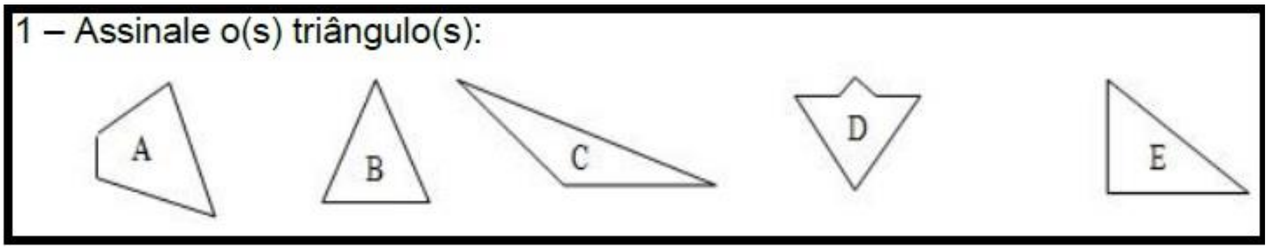
Diante de tarefas mais complexas, os alunos procuram soluções próprias que podem ser concluídas de maneiras diferentes. Assim, eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolver tarefas.

5. Integração

Nesta fase, o aluno relê e resume o que foi aprendido, com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. Assim, o aluno alcança um novo nível de pensamento.

7 QUESTIONÁRIO PARA AVALIAR OS NIVEIS SEGUNDO VAN HIELE

Questões Relativas ao Primeiro Nível



Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.95)

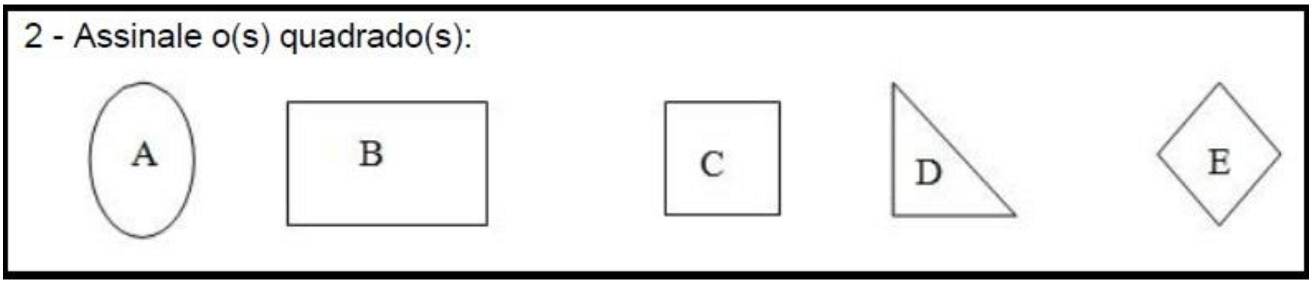
Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X : Somente a alternativa B.

Aluno Y : Alternativas B, C e D.

Aluno Z : Alternativas B, C e E.

O aluno X conhece o triângulo somente na forma tradicional, não sendo capaz de indentificar as figuras C e E também como triângulos, sendo assim, nãose encontra no nível básico. O aluno Y consegue reconhecer um pouco mais pois marcou também a fgura C, porém, ao marcar a figura D, considerou apenas os segmentos grandes, desconsiderando que os dois segmentos pequenos que acrescentavam dois novos lados ao desenho, compreende as formas geométricas como um todo (aparência física), não pelas suas propriedades ou partes e sendo assim, de igual maneira nãose encontra no nível básico. Por sua vez, o aluno Z, conseguiu encontrar os três triângulos inseridos nas alternativas, este sujeito alcançou nível básico de Van Hiele de visualização.



Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.95)

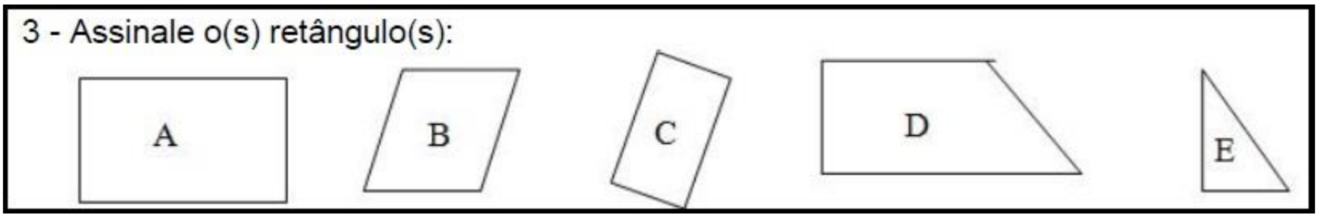
Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X : Somente a alternativa C.

Aluno Y : Alternativas B e C.

Aluno Z : Alternativas C e E.

O aluno X tem imagem conceitual do quadrado, e não é capaz ainda de reconhecer que a figura E também é umquadrado, e, portanto ainda não atingiu o nível básico. O aluno Y consegue reconhecer a figura C, porém ao marcar a figura B o faz somente por ter quatro lados paralelos, desconsiderando o fato das medidas serem diferentes, dessa forma apenas baseou-se na aparência (nívelde visualização). Já o aluno Z compreendeu as propriedades dos quadrados, reconhecendotambém, a figura E, que seria uma característica de raciocínio no nível de análise.



Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.95)

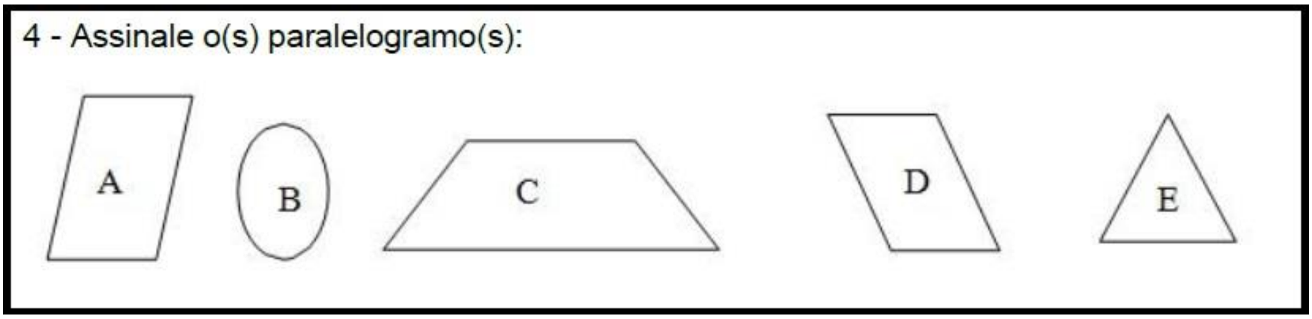
Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X : Somente a alternativa A.

Aluno Y : Alternativas A, C e D.

Aluno Z : Alternativas A e C.

O aluno X tem imagem conceitual do retângulo, e não é capaz ainda de reconhecer que a figura C também é umretângulo, e, portanto ainda não atingiu o nível básico. O aluno Y consegue reconhecer a figura C, porém ao marcar a figura D o faz somente por ter quatro lados paralelos, desconsiderando o fato das medidas serem diferentes, dessa forma apenas baseou-se na aparência (nívelde visualização). Já o aluno Z compreendeu a propriedades dos retângulos, reconhecendotambém, as figuras A e C, que seria uma característica de raciocínio no nível de análise.



Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.95)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

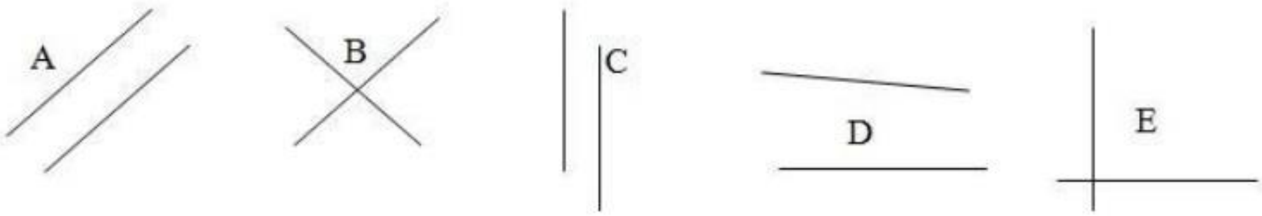
Aluno X : B e/ou E.

Aluno Y : Alternativas C.

Aluno Z : Alternativas A e D.

O aluno X ainda não reconhece a imagem conceitual de um paralelogramo, muito menoscompreende suas características. O aluno Y, analisou pela aparência global da figura e confundiu o paralelogramo com o trapézio. Já o aluno Z, conseguiu entender visualizar todas as características de um paralelogramo presentes na figura A, bem como compreende que a figura D também é um paralelogramo apesar de não estar representada da forma tradicional.

5 - Assinale a(s) reta(s) paralela(s):



Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.95)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: B e/ou D e/ou E

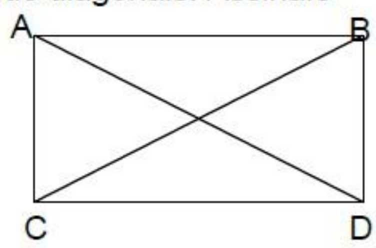
Aluno Y: C

Aluno Z: A e C

O aluno X não compreendeu o conceito de retas paralelas, não atingindo o nível básicodo reconhecimento. Já o aluno Y, compreendeu o conceito de uma forma visual "tradicional", não acertando a questão por inteiro. O aluno Z, além de reconhecer a figura C, ainda percebeuque na figura A também se encontram retas paralelas.

Questões Relativas ao Segundo Nível

6 - No retângulo ABCD, as linhas AD e BC são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativas(s) verdadeira(s) para todos os retângulo:



a) Têm 4 ângulos retos.

b) Têm lados opostos paralelos.

c) Têm diagonais de mesmo comprimento.

d) Têm os 4 ângulos iguais.

e) Todas são verdadeiras

Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.96)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: A, B ou C

Aluno Y: D ou E

Aluno Z: A, B e C

O aluno X consegue reconhecer apenas uma das características do retângulo, não analisando todas as sentenças adequadamente, ou ainda “chutou” uma resposta. O aluno Y ao assinalar a resposta D confundiu a característica do retângulo com uma característica do quadrado ou ainda não lembrou que para a alternativa estar certa se faz necessário a palavra “opostos” – tem lados <u>opostos</u> iguais, por isso também, a alternativa E não está correta. Já o aluno Z, buscou analisar todos os detalhes, respondendo corretamente, características dosegundo nível.

7 – Dê três propriedades dos quadrados:

I:____

II:_______________________________________

III: ______________________________________

Fonte: NASSER; SANT’ANNA (2010, p.96)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

1 – É um quadrilátero (possue quatro lados);

2 - Possui ângulos opostos iguais;

3 - Lados Congruentes;

4 – Ângulos internos retos (90°)

5 - A soma dos ângulos internos é igual a 360°;

6 - As diagonais de um quadrado cruzam-se em seus pontos médios

Esta é uma questão com um certo grau de dificuldade para alunos, porém, a priori espera-se que os alunos consigam identificar as características relacionadas à aparência global de um quadrado. As respostas anteriormente citadas estão corretas de acordo com o segundo nível do conhecimento geométrico, a análise.

Não obstante, as possíveis respostas apresentadas pelos alunos serão:

Aluno X: 1 – Quatro lados; 2 – Lados iguais; 3 – Tem 90º graus.

Aluno Y: 1 – Quadrilátero; 2 – Tem quatro lados iguais; 3 – Quatro vértices.

Aluno Z: 1 – Possui lados opostos paralelos e iguais; 2 – Possui duas diagonais;

3 – Ângulos de mesma medida.

O aluno X observou a imagem, porém, não apresentou características presentes no quadrado, dessa forma, não se encontra no nível 1, pois não conseguiu fazer o reconhecimento da figura. Já o aluno Y, descreve o quadrado em uma linguagem informal, observando apenas a aparência da figura. Contudo, o estudante Z, consegue verificar características presentes no paralelogramo e utilizar uma linguagem formal, dando indícios de estar iniciando o nível da Análise.

8 - Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º.

b) Um dos ângulos mede 90º.

c) Dois ângulos têm a mesma medida.

d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.

e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.96)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: A ou B

Aluno Y: E

Aluno Z: C

O aluno X ainda não conhece as propriedades dos diferentes tipos de triângulos: retângulo, escaleno, equilátero e isósceles. Da mesma forma o aluno Y. Por outro lado, o alunoZ soube interpretar a questão e analisar as características presentes em um triângulo isósceles.

9 – Dê três propriedades dos paralelogramos:

I:____

II:____

III: _______________________________________

Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.96)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

1 – Possui lados opostos paralelos;

2 – Possui ângulos opostos iguais;

3 – Todo retângulo é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um retêngulo;

4 – Todo paralelogramo é um quadrilátero;

5 – O losango é um paralelogramo;

6 – As diagonais de um paralelogramo cruzam-se em seus pontos médios.

Assim como a questão 7, esta é uma questão que também tem certo grau de dificuldade para alunos, porém, a priori espera-se que os alunos consigam identificar as características relacionadas à aparência global de um paralelogramo. As respostas anteriormente citadas estão corretas de acordo com o segundo nível do conhecimento geométrico, a análise.

Não obstante, as possíveis respostas apresentadas pelos alunos serão:

Aluno X: 1 – Retângulo torto; 2 – Lados iguais; 3 – Tem 90º graus.

Aluno Y: 1 – Tem forma de um retângulo; 2 – Tem dois lados iguais; 3 – Quatro vértices.

Aluno Z: 1 – Possui lados opostos paralelos e iguais; 2 – Possui duas diagonais; 3 – Ângulosopostos de mesma medida.

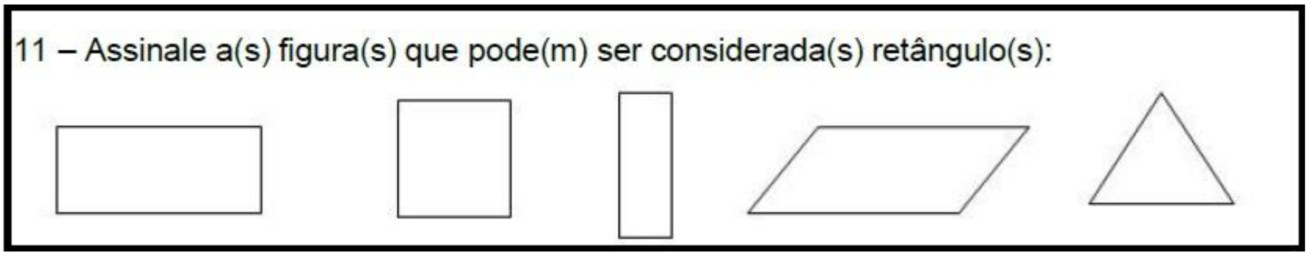
O aluno X observou a imagem, porém, não apresentou características presentes no paralelogramo, dessa forma, não se encontra no nível 1, pois não conseguiu fazer o reconhecimento da figura. Já o aluno Y, descreve o paralelogramo em uma linguagem informal, observando apenas a aparência da figura. Contudo, o estudante Z, consegue verificar características presentes no paralelogramo e utilizar uma linguagem formal, dando indícios deestar iniciando o nível da Análise.

10 - Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não tem o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.96)

Para esta questão é muito comum que que os alunos façam inúmeros desenhos, e é outro exercício em que os alunos apresentarão dificuldades em realizar, isso se dá porque todos os quadriláteros por eles conhecidos tem diagonais congruentes, porém o paralelogramo obliquângulo é um quadrilátero que apresenta diagonais com comprimentos diferentes. Sendo o aluno capaz de desenhar corretamente e identificar a figura usando linguagem formal nos dá indícios de estar iniciando o nível da Análise.

Questões Relativas ao Terceiro Nível



Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.97)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: 5

Aluno Y: 1, 3 e 4

Aluno Z: 1 e 3

Aluno W: 1, 2 e 3

O aluno X não compreende as características básicas de um retângulo não atingindo o nível do reconhecimento. O aluno Y analisou somente pela semelhança esquecendo que um retângulo possui ângulos retos. Já o aluno Z consegue reconhecer as duas figuras que representam um retângulo, baseando apenas na aparência global (visualização), ou buscou averiguar os lados e ângulos, características do nível da análise. Por sua vez, o aluno W além de reconhecer as figuras 1 e 3 percebeu que o quadrado 2 satisfaz as características de um retângulo ou lembrou da seguinte propriedade: "todo quadrado é também um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado", características essas do nível de Dedução Informal.

12 – O quatros ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais. I – Pode –se afirmar que ABCD é um quadrado?__________ II – Porque? III – Que tipo de quadrilátero é ABCD?

Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.97)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: Sim, porque possue lados iguais. É uma quadrado

Aluno Y: Não, porque retângulos também possuem ângulos iguais. Pode ser tanto quadrado como retângulo.

No momento em que o aluno X responde que "sim", percebe- se que algumas características presentes no quadrado e retângulo ainda não estão bem claras. Por conseguinte, o aluno Z analisa as propriedades do retângulo e as propriedades do quadrado e verifica que qualquer propriedade do retângulo satisfaz para um quadrado.Este aluno estabelece interrelação entre as propriedades das figuras dando indicios de que se encontra no nível de Dedução Informal.

13 – Pode –se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo?________ Porque?

Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.97)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: Não, porque não tem ângulos retos;

Aluno Y: Sim, porque tem quatro lados;

Aluno Z: Sim, porque o retângulo é um tipo especial de paralelogramo. O retângulo possui ângulos opostos iguais, lados opostos paralelos e de mesma medida, possui quatro ângulos e suas diagonais cruzam-se em seus pontos médios.

No momento em que o aluno diz SIM é possível perceber que ele possui algum conhecimento referente a retângulo e paralelogramo, analisando as figuras em termos de seus componentes (análise). O aluno X, não compreendeu que todo retângulo é também um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um retângulo. O aluno Y não está errado, pois essa é uma das características de ambos, porém não justifica a resposta (análise), já o aluno Z apresenta em sua justificativa, propriedades que definem um retângulo como um paralelogramo.

14 - Considere as afirmações:
(I) A figura X é um retângulo.
(II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.

b) Se I é falsa, então II é verdadeira.

c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.

d) I e II não podem ser ambas falsas.

e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.97)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: A

Aluno Y: B e/ou E

Aluno Z: C

No momento em que o aluno X marca a alternativa A é possível perceber que ele não reconhece a imagem conceitual do retângulo, tão pouco do triângulo, portanto ainda não atingiu o nível básico. O aluno y, marcou as alternativas B e E, o que comumente acontece e isso se dá ao fato de os alunos não conseguirem interpretar o enuciado. Em geral, quando questionados sobre a escolha não sabem justificar o porque, então o fizeram por "chute". O aluno Z aluno consegue discernir que as propriedades do retângulo e triângulo não são iguais, sendo impossível estabelecer relação entre as figuras dando indicios de que se encontra no nível de Dedução Informal.

15 - Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados;

a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.

b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.

c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.

d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.

e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010, p.97)

Possíveis respostas e exemplos de análise:

Aluno X: A, B ou D

Aluno Y: E

Aluno Z: C

No momento em que o aluno assinala A, B, D ou E que é o caso do aluno X e Y, percebe-se que algumas características presentes no quadrado e retângulo ainda não estão bem claras. Por conseguinte, o aluno Z analisa as propriedades do retângulo e as propriedades do quadradoe verifica que qualquer propriedade do retângulo satisfaz para um quadrado.

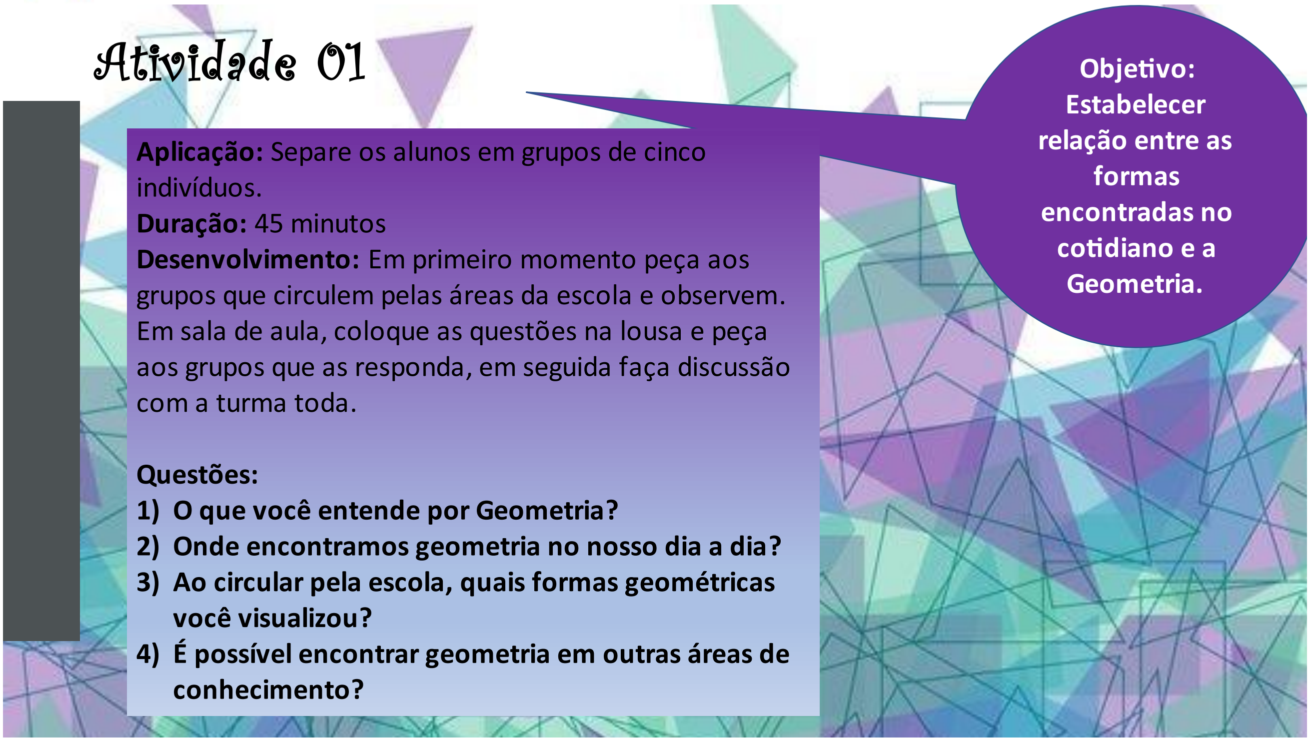
8 CONSTRUINDO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Após aplicação de Teste para avaliar em que nível de pensamento geométrico se encontra a turma em questão, sugiro sequência de atividade para minimizar as defasagens. É interessante que em todo o processo o professor provoque o aluno a se aprofundar no assunto, mas também que sejam proporcionados momentos de recuperação e aprofundamento para que alcance todos os níveis de aprendizagem.

ATIVIDADE 1

A atividade a seguir, visa que os estudantes estabeleçam relações entre as formas encontradasno cotidiano e a Geometria, visto que, estão em contato direto com as formas tridimensionais e, muitas vezes não fazem ligação com o assunto estudado.

Na ATIVIDADE 1, o(a) professor(a) pode identificar quais são os conhecimentos prévios apresentados pelo educando.



Fonte: Elaborado pelo Autor

É importante ressaltar que o professor será neste momento somente um mediador, para favorecer o protagonismo dos alunos. Através das trocas é despertado conhecimentos anteriores que estavam guardados, favorece o aprendizado e os prepara para fase seguinte de aprendizagem.

ATIVIDADE 2

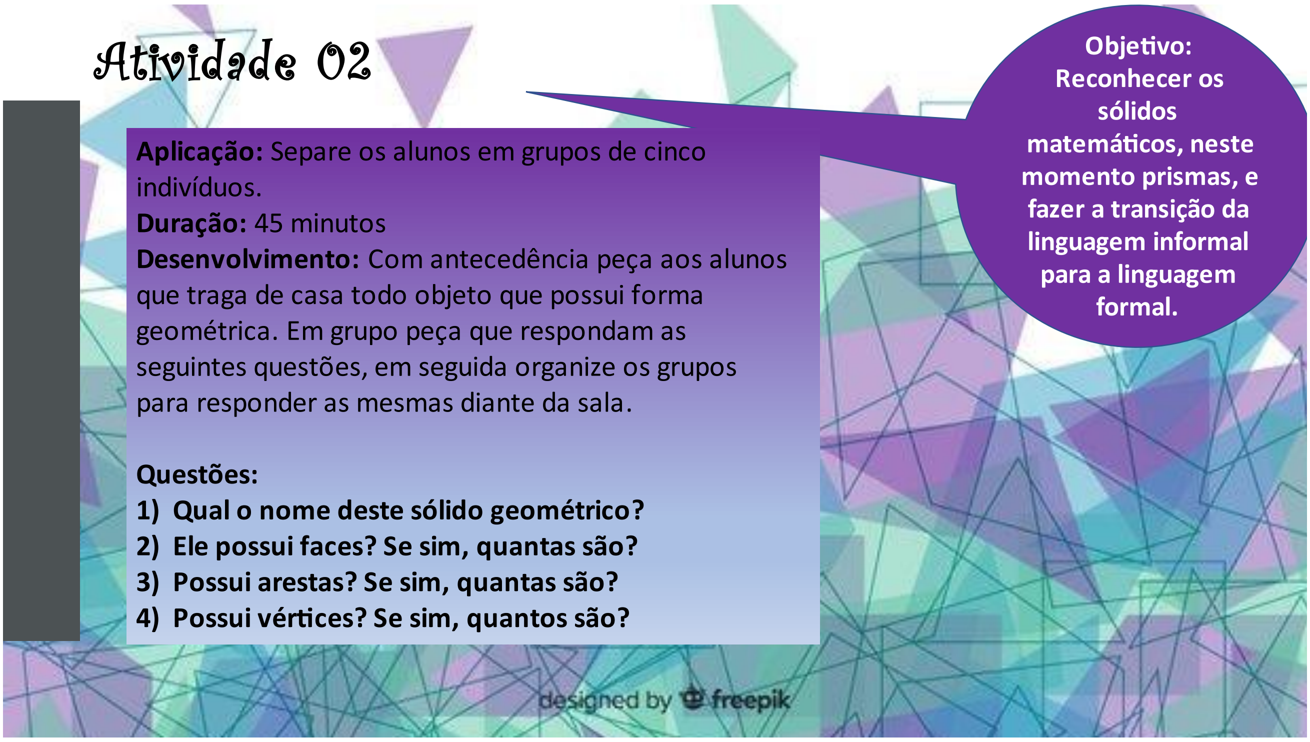
Esta atividade consiste em manusear objetos geométricos encontrados no cotidiano, e para esse caso, iniciaremos com tipos diferentes de prismas (caixa de sapato, creme dental ou sabonete,de algum alimento, entre outros). Dessa forma, poderá ser trabalhado o conceito de prismas, com todos os seus elementos, e na sequência, introduzir as formas poligonais apresentadas nas faces de cada prisma. Ess atividade irá prepará-los para a próxima atividade.

No exato momento em que o aluno consegue manipular os objetos matemáticos, a abstração será mais bem compreendida, ainda mais quando este conteúdo está presente no dia a dia, fazendo as associações matemáticas necessárias tudo se tornará mais fácil.

Para que esta tarefa possa ser realizada, pede-se ao aluno para trazer de casa alguns sólidos geométricos encontrados no cotidiano, dando sequência a discussão da aula anterior. Neste momento será oportunidade para observar se o conteúdo foi absorvido com sucesso.

Depois de efetuada a atividade, sempre faz-se necessário uma conversa com o grupo, pois é nesse momento que o aluno, com seus conhecimentos prévios, troca informações com seus colegas e, em muitos momentos, muda-se a percepção em relação ao objeto estudado,adquirindo novos conceitos.

O professor tem um papel muito importante nesta etapa, auxiliando na transição da linguagem informal para a uma linguagem mais formal, mostrando matematicamente as formas presentes no cotidiano.

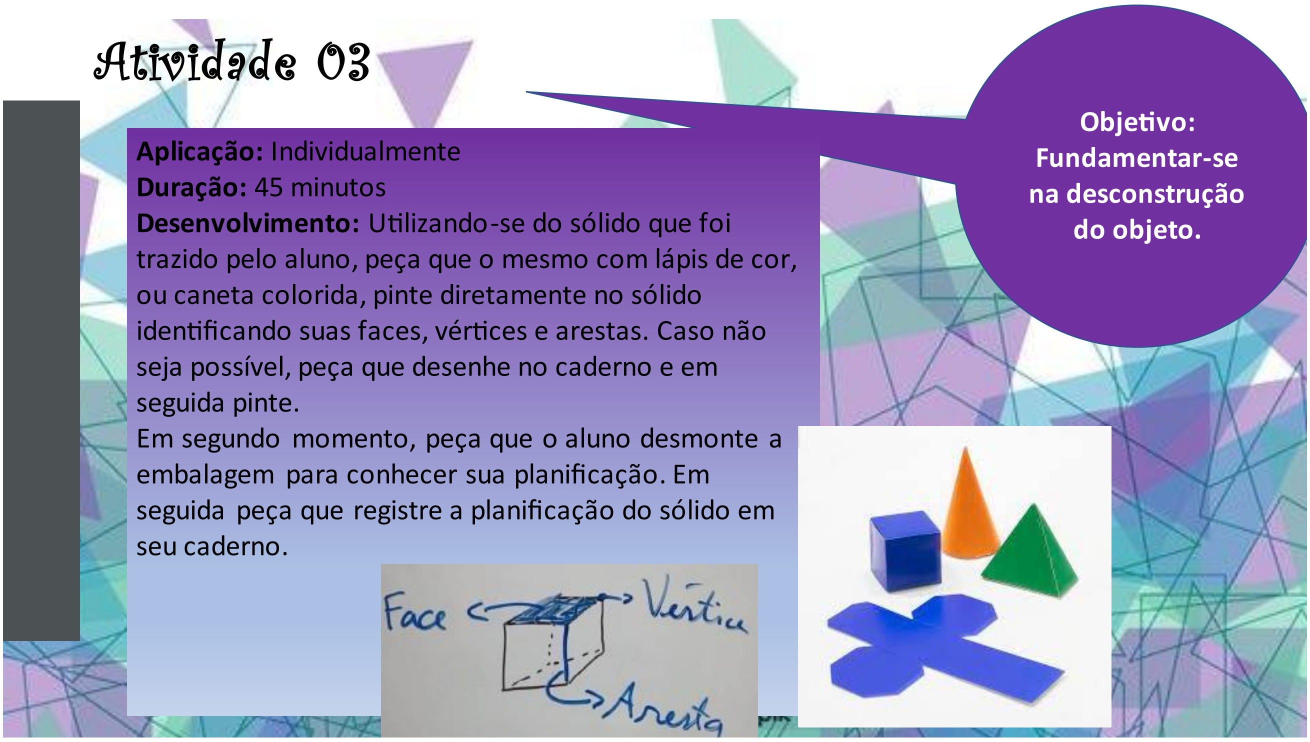


Fonte: Elaborado pelo Autor

Torno a dizer que o papel do professor será somente mediar. Será necessário nesta atividade relembrar os conceitos de área, face e aresta, porém em primeiro momento provoque os alunos a buscar a informação. Neste momento será possível ter um feedback das ações do docente e se necessário for, faça novas intervenções e recomece.

ATIVIDADE 3

Complementando a aividade anterior, seguiremos fundamentando-se na desconstrução do objeto, ou seja, o aluno passará da dimensão 3 para a dimensão 2, manipulando o sólido que ele mesmo trouxe de casa.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Para que a geometria seja melor compreendida, muitos alunos precisaram mais do que somente visualizar as imagens abordadas no livro didático. Por este motivo é que, na ATIVIDADE 3 proporcionamos aos estudantes manusear objetos presentes no cotidiano com um olhar matemático. Ao final desta atividade, assim como nas outras, separe alguns minutos para socialização das descobertas, lembre-se que para alcançarmos novos níveis se faz necessário que o conteúdo faça sentido e seja absorvido.

Segundo Beline e Costa (2010), o mundo em que vivemos é tridimensional, dessa forma,os conceitos geométricos podem ser melhor entendidos quando, primeiramente, são apresentando em sua forma habitual, ou seja, introduzir a geometria com as formas espaciais.

ATIVIDADE 4

Na ATIVIDADE 4, faremos uso de elementos figurais, porém, este ainda exposto em três dimensões. Ao desenvolver esta tarefa, o aluno conseguirá assimilar com maior facilidade os principais sólidos geométricos.

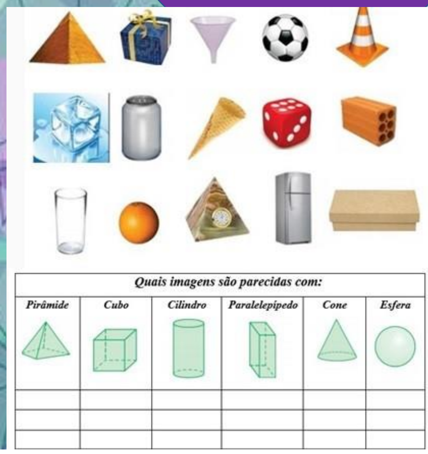
Atividade 04

Aplicação: Individualmente
Duração: 45 minutos
Desenvolvimento: Será entregue a cada aluno folha de atividade contendo formas vistas no cotidiano e, sólidos matemáticos. O aluno deverá ser capaz de relacionar as imagens aos sólidos. Em seguida deverá responder as seguintes questões:

1) Quais sólidos rolam dependendo da pos ição?
2) Quais não rolam dependendo da posição?
3) Quais sólidos possuem vértices? Quantos são?
4) Quais sólidos possuem arestas? Quantas são?
5) Quais sólidos possuem faces? Quantas são?

Ao final proporcione momentos de discussão permitindo que os alunos troquem conhecimentos.

Objetivo: Assimilação dos sólidos geométricos bem como de suas propriedades.

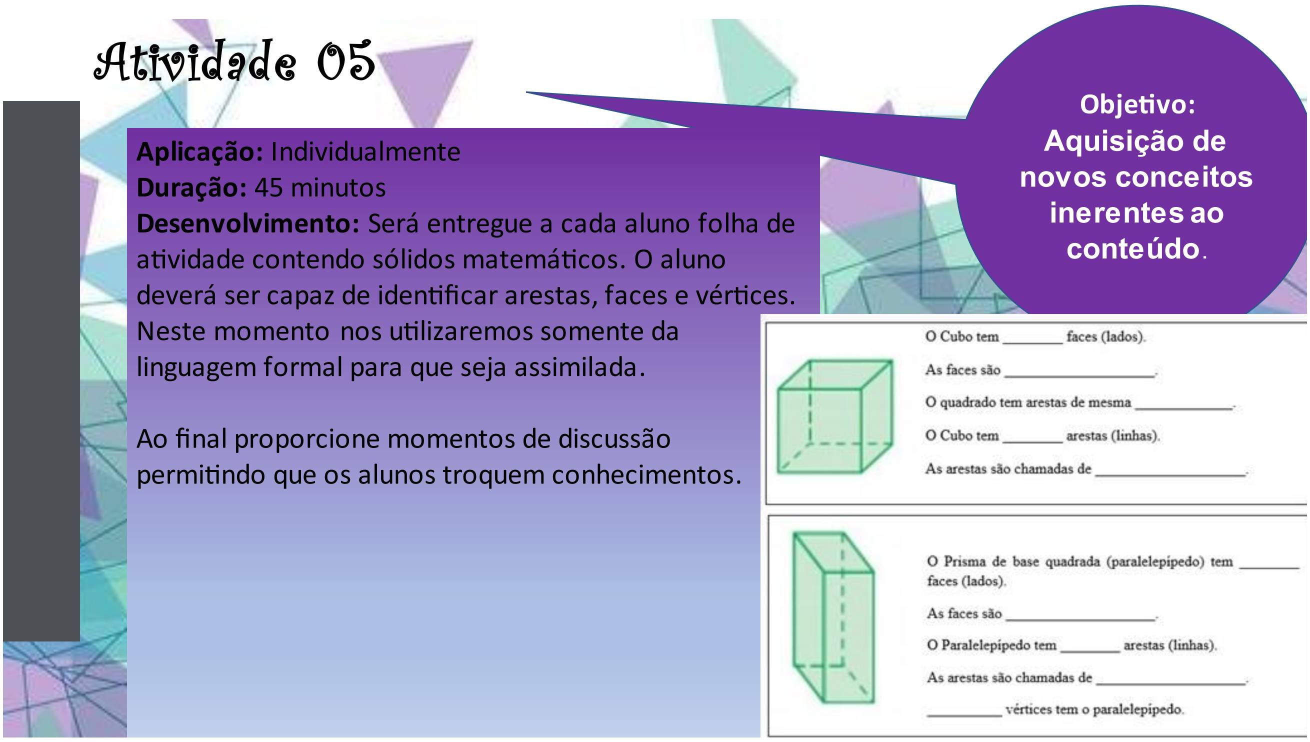


Fonte: Elaborado pelo Autor

Mais um vez, se faz importante o papel do professor como mediador, para favorecer o protagonismo dos alunos. Através das trocas é despertado conhecimentos anteriores que estavam guardados, favorece o aprendizado e os prepara para fase seguinte de aprendizagem. Proporcione momentos e questionamentos que consigam interrelacionar os conhecimentos prévios ao conteúdos novos.

ATIVIDADE 5

Na ATIVIDADE 5 será exigido dos alunos conhecimentos relacionados aos elementos matemáticos, mais especificamente, dos sólidos geométricos, visando uma observação mais detalhada do sólido apresentado, na tentativa de adquirir novos conceitos inerentes ao conteúdo.



Fonte: Elaborado pelo Autor

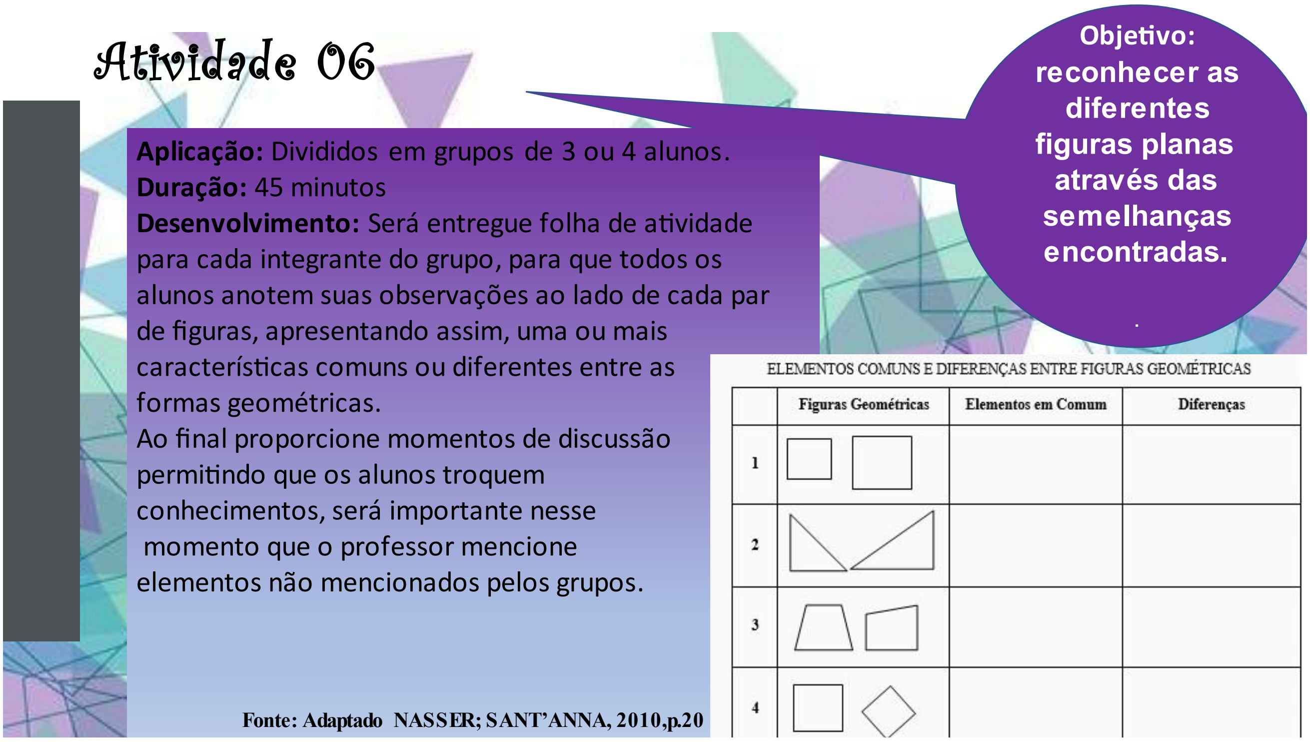
Diante dos conhecimentos abordados na ATIVIDADE 5, chegou o momento do professor introduzira Geometria Plana, estabelecendo relações entre os sólidos geométricos e suas respectivas faces.E, como complemento, introduziremos a ATIVIDADE 6.

ATIVIDADE 6

A ATIVIDADE 6, tem por objetivo reconhecer as diferentes figuras planas através dassemelhanças encontradas.

Neste momento deverá diferenciar as figuras geométricas entre suas propriedades, bem como identificar figuras planas e sólidos geométricos, observando assim, as semelhanças e diferenças encontradas entre as imagens propostas.

Esta é uma das atividades propostas pelo Projeto Fundão coordenado por Nasser e Sant’anna (2010, p. 16-17), em que a presente atividade visa trabalhar com “as representaçõesdas figuras e dos sólidos”.



	Figuras Geométricas	Elementos em Comum	Diferenças
1			
2			
3			
4			

Fonte: Elaborado pelo Autor

ATIVIDADE 7

Esta atividade consiste em investigar as propriedades das formas geométricas por sua aparência, separando as figuras por grupos, quadrados, retângulos, paralelepípedos, entre outros. Primeiramente os alunos deverão discutir as propriedades em grupo e depois compartilhar com os demais colegas.

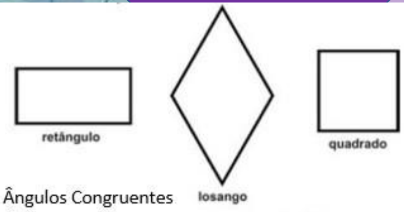
Atividade 07

Objetivo: Reconhecer as propriedades das figuras planas e interrelacioná-las.

Aplicação: Divididos em grupos de 3 ou 4 alunos.
Duração: 45 minutos
Desenvolvimento: Será entregue folha de atividade para cada integrante do grupo. Cada um deverá analisar as semelhanças das figuras apresentadas, em seguida relacionar as propriedades que constam abaixo a cada figura.
Permita que os grupos troquem as observaçõesantes de abrir discussão com a turma toda.
Após observação e discussão, deverão responder a seguinte questão:

1) Apesar da semelhança estas figuras possuem as mesmas propriedades? Se sim, quais?

Ao final proporcione momentos de discussão permitindo que os alunos troquem conhecimentos, será importante nesse momento que o professormedie as discussões.



1) Ângulos Congruentes
2) Ângulos Opostos
3) Diagonais Congruentes
4) Quatro Lados
5) Soma dos ângulos internos =360°

Fonte: Elaborado pelo Autor

Durante todo o desenvolvimento das atividades propostas, sugere-se a troca de informações entre os alunos, bem como a intepretação dos resultados e validação presente na discussão de toda a turma juntamente com o professor. Dessa forma, o professor estará na condição de mediador, orientando-os na obtenção do conhecimento e o aluno protagonista de seu aprendizado.

Vale ressaltar que Han Viele descreveu as fases de aprendizagem onde se possibilita o avanço de um nível para outro,a sequência apresentada neste produto teve por objetivo respeitar as fases para não ocorrer perda no processo de desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico.O papel do professor neste processo como mediador é de grande responsábilidade, porque não é possível pular de um nível para outro, porém dependendo do método, ou material utilizado pode-se retardar o processo trazendo prejuizos a aprendizagem.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste produto é fornecer orientação prática para os professores de matemática do Ensino Fundamental, constituindo-se como uma possível ferramenta orientadora para aplicação e análise de atividades que promovam o desenvolvimento do pensamento geomátrico, contribndo para compreensão dos conteúdos e melhoria das aulas.

A metodologia utilizada na dissertação é a avaliação da aprendizagem foi por meio da aplicação de umquestionário, de acordo com o modelo de Van Hiele.

As atividades foram desenvolvidas com alunos do nono ano do Ensino Fundamental, sendo realizadas em sala de aula como forma de os conhecimentos relativos a Geometria, apresentando resultados satisfatórios ao processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos, bem como melhores resultados nas avaliações institucionais.

O Questionário servirá como suporte e valiosa ferramenta para verificar a percepção geométrica adquirida pelos alunosem anos anteriores, ajudando o professor na escolha do método, conteúdo, material e mediação das atividades. Já a sequência de atividades, aqui proposta, baseia-se nas características primárias envolvendo a geometria, já que a intenção se dá em construir o pensamento geométrico iniciando-se do nível básico de visualização, podendo o professor adaptá-las caso o nível da turma seja mais elevado. Espera-se que este caderno pedagógico possa contribuir significativamente com os(as) professores(as) no desenvolvimento do ensino da Geometria, para que assim sejamos capazes de desenvolver nos estudantes o pensamento geométrico, a fim de, alcançar aprendizagem satisfatória potencializando melhores resultados na aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. A.; NACARATO, A. M. Tendências didaticopedagógicas no Ensino de Geometria:Um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. **Educação Matemática em Revista**. Recife, PE, v. 11, n. 17, p. 61–70, 2004.

ARAUJO, W. R. **O Ensino do conceito de área no sexto ano do ensino fundamental:** uma proposta didática fundamentada na teoria de Van Hiele. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, 2012.

BARGUIL, P. M. Fiplan: recurso didático para o ensino e a aprendizagem de Geometria na educação infantil e no ensino fundamental. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo, 2016.

BEZERRA, L. S.; LOPES, J. P. O tangram e suas contribuições para o processo de abstração e compreensão dos conceitos geométricos de área e perímetro. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo, 2016.

BRAGA, E. R.; DORNELES, B. V. Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental**. Educação Matemática Pesquisa**, v. 13, n. 2, p. 273 -289, 2011.

CROWLEY, M. L. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo, SP: Atual, 1996.

DAMBRóSIO, U. **Educação Matemática da teoria à prática.** 16. ed. SP: Papirus, 2008.

FERREIRA, F. E. Ensino e aprendizagem de poliedros regulares via teoria de Van Hiele com origami. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática.** Curitiba, 2013.

FRANCO, G.; DIAS, M. DE O. Modelo geométrico de Van Hiele: Estado da arte nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM). **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 1, p. 169-188, 1 jan. 2020.

HIELE, P. M. V. **Structure and insight:** a theory of mathematics education. Nova York: Academic Press, 1986.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. **Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometria:** El modelo de van Hiele. [S.l.]: S. Llinares and M. V. Sánchez, 1990.

KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. **Bolema**, v. 10, p. 21–30, 1994.

NASCIMENTO, E. C. O desenvolvimento do pensamento geométrico, interação social e origami. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo, 2016.

NASSER, L.; LOPES, M. L. M. L. **Geometria na era da imagem e do movimento**. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1996.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1997.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

OLIVEIRA, M.C.E. **Ressignificando conceitos de Geometria Plana a partir dos estudos dos sólidos geométricos.** 2012**.** 279 f. Tese (Mestrado em Ensino de Matemática)—Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Minas Gerais, 2012.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, v. 1, n. 1, p. 7–17, 1993.

SAMPAIO, F. F.; ALVES, G. de S. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA**, n. 5, p. 69–76, 2010.

SANTOS, J.M.S.R. **A teoria de Van Hiele no estudo de áreas de polígonos e poliedros**.2015. 109 f. Tese (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro de Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, 2015.

VITAL, C.; MARTINS; E. R.; SOUZA, J. R. O uso de materiais concretos no ensino de Geometria. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo, 2016.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a teoria de van Hiele. **Educacao Matemática Pesquisa**, v. 12, n. 3, p. 400–431, 2010.
YIN, R. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.